

POLINÔMIOS GENERALIZADOS. SPLINES GENERALIZADOS. ALGUNOS ALGORITMOS CONVENIENTES

F. Aleixo Oliveira

Centro de Matemática
Universidade de Coimbra

Abstract - We consider spline functions of generalized polynomials, $S_{pg}(x)$, which are an extension of spline polynomials functions. We prove the existence and the unicity of an interpolate $S_{pg}(x)$ of order two, for a real-valued function f , known at n given real points. An extension of the Lagrange interpolate is given on the linear space of the $S_{pg}(x)$ functions of order two. Finally we present an approximation of histograms by $S_{pg}(x)$ function of order three.

1 - A generalização do conceito de polinômios levou a considerar combinações lineares de dadas funções $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$. Suporemos que estas funções formam um sistema de Chebyshev em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. As combinações lineares $\sum_{i=1}^n c_i g_i(x)$ serão designadas por polinômios generalizados.

Poderemos considerar diferentes tipos de aproximações por meio destes polinômios generalizados - aproximação de Chebyshev, aproximação em $\mathcal{L}_p[a,b]$, etc. Existem resultados muito importantes sobre o assunto. Ver [2]. Recentemente, G. Muhlbach, ver [3] e [4] e F. Oliveira [5] apresentaram resultados sobre interpolação por polinômios generalizados. Muhlbach generaliza os resultados conhecidos para polinômios ordinários apresentando o algoritmo de Neville-Aitken e o de Newton-das-Diferenças-Divididas para polinômios generalizados. F. Oliveira desenvolve um interpolador não linear obtido a partir das funções $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$ dadas.

Estes resultados sobre polinômios generalizados sugerem naturalmente novas generalizações.

2 - Lembremos que podemos definir função spline polinomial de grau $m(m=0,1,2,\dots)$ e continuidade $k(k \geq 0, \text{ inteiro})$ como a função $S_m(x) \in C^k[a,b]$ que se reduz a um polinômio de grau m (ou inferior) em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição Δ de $[a,b]$.

Um tipo semelhante de funções spline utilizando polinômios generalizados, pode ser definido:

Splines de Polinômios Generalizados - diremos que $s(x)$ é um spline de polinômios generalizados de ordem n em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e nodos $\{x_i\}_{i=1}^n \in [a,b]$ se

a) $s(x)$ é da forma $\sum_{i=1}^n c_i g_i(x)$ em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição Δ de $[a,b]$;

b) $s(x) \in C^k[a,b]$ com $k \geq 0$.

Designaremos por $S_{pg}(m,k)$ o conjunto dos splines de polinômios generalizados de ordem m e continuidade k em $[a,b]$.

Teorema 1 - Dada uma função $f: A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, existe um único elemento $s(x) \in S_{pg}(2,k)$ que aproxima f em cada intervalo $[T_i, T_{i+1}]$ de $A = [a,b]$ e que é interpolador para f nos pontos $\{T_i\}_{i=1}^n$ de partição

$$\Delta: a = T_1 < T_2 < \dots < T_n = b.$$

Para $x \in [T_1, T_2]$ teremos $s(x) \in S_{pg}(2,k)$ dado por

$$s(x) = c_{11} g_1(x) + c_{12} g_2(x)$$

$$= f(T_1) \frac{D[x, T_2]}{D[T_1, T_2]} + f(T_2) \frac{D[T_1, x]}{D[T_1, T_2]}$$

$$\text{com } D[T_1, T_2] = \begin{vmatrix} g_1(T_1) & g_1(T_2) \\ g_2(T_1) & g_2(T_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

De modo análogo $s(x) = c_{i1} g_1(x) + c_{i2} g_2(x)$ para $x \in [\bar{T}_i, \bar{T}_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. É evidente que $s(\bar{T}_i) = f(\bar{T}_i)$, $i = 1, \dots, n$ e em cada $[\bar{T}_i, \bar{T}_{i+1}]$ é interpolador único. Ver [2], pg. 78.

Se $\{g_i(x)\}_{i=1}^2 \in C^k[\bar{a}, \bar{b}]$ teremos $s(x) \in C^k[\bar{a}, \bar{b}]$.

O erro da aproximação $s(x)$ para f pode exprimir-se por

$$E(x) = f(x) - s(x) = [f''(\xi) - s''(\xi)] (x - \bar{T}_i)(x - \bar{T}_{i+1})$$

para $x \in [\bar{T}_i, \bar{T}_{i+1}]$ com $\xi \in]\bar{T}_i, \bar{T}_{i+1}[$, $i = 1, \dots, n-1$.

3 - Designando por A o espaço linear de todas as funções spline de polinômios generalizados de ordem 2 e contínuas em $[\bar{T}_1, \bar{T}_n]$, com possíveis descontinuidades para as derivadas nos pontos $\bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-1}$, construiremos uma base para A :

Seja $\bar{T}_0 := \bar{T}_1$, $\bar{T}_{n+1} := \bar{T}_n$. Tomemos

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{D[\bar{T}_{i-1}, x]}{D[\bar{T}_{i-1}, \bar{T}_i]} & , \quad \bar{T}_{i-1} \leq x \leq \bar{T}_i \\ \frac{D[x, \bar{T}_{i+1}]}{D[\bar{T}_i, \bar{T}_{i+1}]} & , \quad \bar{T}_i \leq x \leq \bar{T}_{i+1} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

$$a) \quad H_i(\bar{T}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$b) \quad H_i(x) \in A, \quad i = 1, \dots, n$$

$$c) \quad \sum_{i=1}^n r(\bar{T}_i) H_i(x) \in A \text{ e coincide com } r(x) \text{ nos pontos } \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n.$$

Teorema 3. - Se f é um elemento de A então o seu interpolador $s(x) \in S_{pg}(2, k)$ coincide com f , $s(x) = f(x) \in A$.

Então de c) vem que $f(x) \in A$ se pode exprimir na forma

$$d) \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f(\bar{T}_i) H_i(x)$$

Chamaremos a c) interpoladora de Lagrange em A , para uma função $r(x)$ conhecida nos $\{\bar{T}_i\}_{i=1}^n$ pontos.

4 - Aproximação de histogramas por splines de polinômios generalizados de ordem três.

Supomos dados

1 - Um conjunto de $\{g_i(x)\}_{i=1}^3$ funções formando um sistema de Chebyshev em $[a, b]$.

2 - Uma sucessão estritamente crescente de pontos

$$\{T_i\}_{i=1}^{n+1} \in [a, b]$$

3 - O histograma de uma função f .

Pretende-se aproximar f , a partir do histograma dado, por meio de um spline de polinômios generalizados de ordem 3, que designaremos por $s(x) \in S_{pg}(3, k)$.

A partição Δ de $[a, b]$, obtida pelos pontos $\{T_i\}_{i=1}^{n+1}$, origina n intervalos em $[a, b]$.

Para conhecermos $s(x)$ em $[T_1, T_{n+1}]$ necessitamos de determinar $3n$ incógnitas c_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, 2, 3$.

Iremos obter essas incógnitas pela resolução de um sistema de $3n$ equações lineares conjuntas.

Essas equações obtêm-se impondo condições de interpolação e de homogeneidade, naturalmente sugeridas pelo histograma dado.

a) Condições de interpolação

$$1 - s(T_1) = s(T_{n+1}) = 0$$

$$2 - \int_{T_i}^{T_{i+1}} s(x) dx = h_i \Delta T_i, \quad \text{com } \Delta T_i = T_{i+1} - T_i$$

b) Condições de homogeneidade nos nodos interiores

$$T_i, \quad i=2, \dots, n:$$

$$1 - s(T_i) + \Delta T_i s'(T_i) + \frac{(\Delta T_i)^2}{2} s''(T_i) = s(T_{i+1})$$

$$2 - s'(T_i) + \Delta T_i s''(T_i) = s'(T_{i+1})$$

$$i=2, \dots, n.$$

Temos no total $n+2$ condições de interpolação e $2(n-1)$ condições de homogeneidade que nos permitem obter $s(x)$ pela resolução do sistema formado por essas equações.

Bibliografia

- 1 - Boor, C. de, [1978] — A Pratical Guide to Splines, Springer Verlag.
- 2 - Cheney, E.M. [1966] — Introduction to Approximation Theory,
Mc Graw-Hill.
- 3 - Muhlbach, G., [1978] — The General Neville-Aitken Algoritm and Some
Appl., Num. Math. 31, 97-110.
- 4 - " " [1979] — The General Recurrence Relation for Divided-
-Diff. and the General Newton-Interp. - Algo-
rithm with Appl. to Trig. Interp.,
Num. Math. 32, 393-408.
- 5 - Oliveira, F.A., [1979] - Quasilinear Interpolation by Generalized
Polynomials, to appear.
- 6 - Varga, R. - [1971] — Functional Analysis and Approx. Theory in Nu-
merical Analysis-Regional Conference Series in
Applied Math.